BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 338**

**Conception : HEC Paris**

# FILIERE LITTÉRAIRE

## PROGRAMME ENS B/L

Vendredi 2 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

OPTIONS :

## MATHÉMATIQUES

## SCIENCES SOCIALES *

*** Conception en collaboration avec AUDENCIA**

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Conception : HEC Paris**

---

# MATHÉMATIQUES option B/L

Programme ENS B/L

Vendredi 2 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

*L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.*

## EXERCICE 1

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels appartenant à $]0,1[$. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$y_0 = 0, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{1 + x_n\, y_{n-1}}.$$

1. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n$ est un réel positif.

2. Soit $y$ un réel fixé de $[0,1]$ et $f_y$ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$, $f_y(x) = \dfrac{x+y}{1+x\,y}$.

   a) Montrer que la fonction $f_y$ est croissante.

   b) En déduire que pour tout $x$ de $[0,1]$, $f_y(x)$ appartient à $[y,1]$.

   c) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{y_{n-1}}(x_n)$ et en déduire, à l'aide d'une démonstration par récurrence, que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.

   d) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $a$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant 1$.

3. On suppose que la série de terme général $x_n$ est divergente et on se propose de montrer, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, que $a = 1$.

   a) On suppose que $a \neq 1$. Montrer que $x_n$ est équivalent à $\dfrac{1}{1-a^2}(y_n - y_{n-1})$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   b) En déduire que la série de terme général $x_n$ est convergente. Conclure.

4. On considère la fonction $h$ définie sur $[0,1[$ à valeurs réelles telle que : $h(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n=h(y_n)$.

a) Établir pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la relation : $z_n=\dfrac{1+x_n}{1-x_n}z_{n-1}$.

b) En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'égalité : $z_n=z_0\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2\,x_k}{1-x_k}\right)$.

5. On se propose de montrer que la série de terme général $x_n$ est convergente si et seulement si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

a) On suppose que la série de terme général $x_n$ est convergente.

($i$) Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{2\,x_n}{1-x_n}\right)$ est équivalent à $2\,x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

($ii$) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

($i$) Justifier l'existence et la convergence de la suite $\big(\ln(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

($ii$) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)=0$.

($iii$) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

($iv$) Montrer que la série de terme général $x_n$ est convergente.

c) En déduire que si la série de terme général $x_n$ est convergente, alors on a : $a<1$.

## EXERCICE 2

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|2t-x|\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $g(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<-2\\ \dfrac{x^2}{2}+2 & \text{si } -2\leqslant x\leqslant 2\\ 2x & \text{si } x>2\end{cases}$.

b) Tracer la courbe représentative de $g$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

*Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire $X$ à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.*

Soit $Y$ l'application définie sur $\Omega$ par : $\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\big|2t-X(\omega)\big|\,\mathrm{d}t$.

On admet que $Y$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et on se propose d'étudier, dans un certain nombre de cas, les propriétés de la variable aléatoire $Y$.

2. On suppose dans cette question que $X$ suit la loi uniforme sur $[-2,2]$.

a) Rappeler une densité ainsi que la fonction de répartition $F_X$ de la variable aléatoire $X$.

b) Établir la relation : $Y=\dfrac{X^2}{2}+2$. Préciser $Y(\Omega)$.

c) En déduire que la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$ est définie par : $F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<2\\ \dfrac{\sqrt{2y-4}}{2} & \text{si } 2\leqslant y\leqslant 4\\ 1 & \text{si } y>4\end{cases}$.

d) Vérifier que $Y$ est une variable aléatoire à densité et donner une densité $f_Y$ de $Y$.

e) Montrer que $Y$ admet une espérance que l'on déterminera.

3. On considère dans cette question la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}.$$

a) Montrer que $f$ est une densité.

On suppose que $X$ a pour densité $f$.

b) Déterminer la fonction de répartition de $X$.

c) À l'aide de la question 1, déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.

## EXERCICE 3

- Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $r$ à coefficients réels et pour tout couple $(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $r$ lignes et $s$ colonnes à coefficients réels.
- On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

Soit $n$ un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$.
Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à $j$.
On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- À l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro $j$ ($j \in [\![0,n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel $k$ non nul, on tire une boule avec remise au $k$-ième tirage et on note le numéro $j$ de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du $k$-ième tirage.
Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour tout entier naturel $k$, on considère la matrice $W_k$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P([X_k=0]) \\ P([X_k=1]) \\ \vdots \\ P([X_k=n]) \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel $k$, on note $E(X_k)$ et $V(X_k)$ respectivement, l'espérance et la variance de $X_k$.

1.a) Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, écrire $P([X_{k+1}=j])$ en fonction de certains des nombres $P([X_k=i])$, où $i \in [\![0,n]\!]$.

b) En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$.

2.a) Déterminer la matrice ligne $B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.

b) Calculer le produit $BA$ en fonction de $B$.

c) Exprimer pour tout entier naturel $k$, $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de $k$ et $n$.

3.a) Déterminer la matrice ligne $C$ de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(X_k^2)$.

b) Calculer le produit $CA$ en fonction de $B$ et $C$.

c) Pour tout entier naturel $k$, exprimer $E(X_{k+1}^2)$ en fonction de $E(X_k^2)$ et $E(X_k)$.

4. Pour tout entier naturel $k$, on pose $u_k = E(X_k^2) - \dfrac{n}{2^k}$.

a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de $E(X_k^2)$ en fonction de $k$ et $n$.

c) Exprimer $V(X_k)$ en fonction de $k$ et $n$.

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$ et on rappelle que la base canonique de cet espace est $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ où, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, la fonction $e_j$ est définie par $e_j(x) = x^j$.

Soit $f$ l'application qui, à une fonction polynôme $S$ de $\mathbb{R}_n[x]$, associe la fonction $Q = f(S)$ définie par :

$$Q(x) = f\big(S\big)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x S(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 1 \\ S(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

5.a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynomiale $q_j$ par $q_j = (x-1)^j$.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ constituée de vecteurs propres de $f$.

b) Écrire la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage $T$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice $T^{-1}$, inverse de $T$.

d) Écrire pour tout entier naturel $k$, la dernière colonne de la matrice $A^k$.

7.a) Montrer que pour tout entier naturel $k$, la loi de $X_k$ est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P([X_k = j]) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j+i+1)^k}.$$

b) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} P([X_k = j])$. Interpréter l'issue asymptotique des tirages.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Conceptions : HEC Paris – Audencia Nantes**

---

## SCIENCES SOCIALES

Programme ENS/BL

Vendredi 2 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

---

**Comment peut-on interpréter l'émergence de nouveaux modèles familiaux ?**

*N.B. : Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.*
*Il n'est fait usage d'aucun document et l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.*

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1262 – D'après documents fournis